Série N° 1 – Calcul Vectoriel & Analyse Dimensionnelle

Exercice 1

Dans un repère orthonormé à deux dimensions, muni d'une base cartésienne $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les vecteurs : $\vec{v}=\binom{4}{2}$ et $\vec{w}=\binom{2}{-2}$.

1. Tracer ces vecteurs dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, en choisissant l'échelle.
2. Calculer leurs modules et comparer avec le dessin.
3. Déterminer et représenter les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ portés respectivement par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
4. Calculer et représenter $\overrightarrow{v_1}=\vec{v}+\vec{w}$ et $\overrightarrow{v_2}=\vec{v}-\vec{w}$.
5. Calculer le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{w}$ et l'angle aigu entre ces deux vecteurs.

Exercice 2

1. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}=\sin t\,\vec{\imath}+\cos t\,\vec{\jmath}+t\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2}=e^{-t}\vec{\imath}+2\cos 3t\,\vec{\jmath}+2\sin 3t\,\vec{k}$.
   - Calculer : $\frac{d\overrightarrow{V_1}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{V_2}}{dt}$.
2. Soient les vecteurs $\vec{A}=5x^2\vec{\imath}+(2x+1)\vec{\jmath}-2\vec{k}$, $\vec{B}=5\vec{\imath}+(2x^2-x)\vec{\jmath}-2x\vec{k}$.
   - Calculer de deux manières différentes $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$.

Exercice 3 (À traiter en Cours)

Une force $\vec{F}=5\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$ provoque le mouvement d'un corps qui se déplace suivant le vecteur déplacement : $\vec{L}=3\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-4\vec{k}$.

1. Trouver $W=\vec{F}\cdot\vec{L}$, le travail de la force $\vec{F}$ le long du déplacement $\vec{L}$.
2. Déduire la projection de la force $\vec{F}$ sur le vecteur déplacement $\vec{L}$.
3. Trouver la relation entre les composantes du vecteur déplacement $\vec{d}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$, pour que le travail de $\vec{F}$ le long de $\vec{d}$ soit nul.

Exercice 4 (À traiter en Cours)

Soit un pendule simple composé d'une masse m attachée à un fil de masse négligeable et de longueur l. On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de gravitation est $\vec{g}$.

- Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période T des petites oscillations de ce pendule s'écrit sous la forme $T=Cst\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Exercice 5

Soit un gaz enfermé dans un récipient, la pression P qu'exerce ce gaz est due aux chocs des molécules sur la paroi interne. À priori P dépend de la densité n du gaz (n est le nombre des molécules par m^3), de la masse m de chaque molécule et de la vitesse moyenne $\bar{v}$ de leur déplacement.

- En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver la formule de la pression P à une constante près.

Exercice 6

Une masse m est lâchée d'une hauteur h. À son arrivée au sol, elle avait une vitesse $v = \sqrt{2gh}$. Si la hauteur $h = 53{,}6\,m$ est mesurée avec une incertitude absolue de $1\,cm$ et l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81\,m/s^2$ est connue avec une incertitude relative de $0{,}1\%$, estimer l'incertitude sur la valeur de la vitesse v calculée.